This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

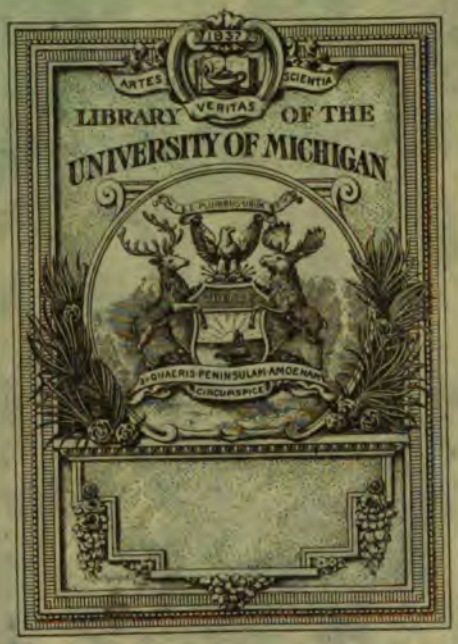
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 50477 5

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Astron. Observ.

Astronomical
Observatory
QB
377
.P44

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

N° D'ORDRE
387.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. PÉRIGAUD, astronome
ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

1re THÈSE. — EXPOSÉ DE LA MÉTHODE DE HANSEN POUR LE CALCUL DES PERTURBATIONS SPÉCIALES DES PETITES PLANÈTES.

~~2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.~~

Soutenues le 27 mars, devant la Commission d'Examen.

MM. PUISEUX, *Président.*
PR. T,
BONNET, } *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
1877

Digitized by Google

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	MILNE EDWARDS, Professeur.	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
PROFESSEURS HONORAIRES	DUMAS.	
	PASTEUR.	
	DELAFOSSE.	
PROFESSEURS	CHASLES	Géométrie supérieure.
	LE VERRIER	Astronomie.
	P. DESAINS	Physique.
	LIOUVILLE	Mécanique rationnelle.
	PUISEUX	Astronomie.
	HÉBERT	Géologie.
	DUCHARTRE	Botanique.
	JAMIN	Physique.
	SERRET	Calcul différentiel et intégral.
	H. Ste-CLAIRE DEVILLE	Chimie.
	DE LACAZE-DUTHIERS	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	BERT	Physiologie.
	HERMITE	Algèbre supérieure.
	BRIOT	Calcul des probabilités, Physique mathématique.
	BOUQUET	Mécanique physique et expérimentale.
	TROOST	Chimie.
	WURTZ	Chimie organique.
	FRIEDEL	Minéralogie.
AGRÉGÉS	BERTRAND	Sciences mathématiques.
	J. VIEILLE	Sciences mathématiques.
	PELIGOT	Sciences physiques.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

3481 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, successeur de MALLET-BACHELIER, Quai des Augustins, 55.

Digitized by Google

PREMIÈRE THÈSE.

EXPOSÉ

DE LA MÉTHODE DE HANSEN

POUR LE CALCUL

DES PERTURBATIONS SPÉCIALES DES PETITES PLANÈTES.

APPLICATION. — COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DES COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

INTRODUCTION.

Quand on veut déterminer le lieu d'une petite planète dans l'espace, on part des éléments elliptiques qui représentent, à une certaine époque prise pour origine, la position de l'astre et sa vitesse, et l'on calcule les coordonnées x, y, z, résultant de l'emploi de ces éléments; puis les variations δx, δy, δz de ces coordonnées, causées par les perturbations. Pour cela, à l'aide des expressions de $\frac{d^2\delta x}{dt^2}$, $\frac{d^2\delta y}{dt^2}$ et $\frac{d^2\delta z}{dt^2}$ et des formules de quadrature mécanique, on obtient les valeurs numériques de δx, δy et δz pour les diverses dates considérées.

Telle était du moins la méthode adoptée jusqu'à ces deux ou trois dernières années, et qui semble devoir être bientôt définitivement remplacée par une nouvelle, due à Hansen, dont l'exposition figure dans le troisième volume des *Mémoires de la Société scientifique de Saxe,* année 1857.

Au reste, le *Jahrbuch* de Berlin, où se trouvent publiés les documents nécessaires à ces sortes de recherches, ne communique plus que les données à l'aide desquelles s'effectue l'application de la méthode nouvelle.

Digitized by Google

Il peut donc y avoir quelque opportunité à exposer sur cette matière les travaux de l'astronome de Gotha. Tel est le but du présent Mémoire.

Par un exemple numérique, nous avons ensuite essayé de montrer que l'emploi des formules de Hansen simplifie notablement les laborieux calculs d'autrefois.

Le présent Mémoire est moins une traduction qu'une exposition de la méthode de Hansen. Nous avons le plus souvent modifié d'une manière simple les démonstrations de l'auteur. C'est ainsi, par exemple, que, pour arriver à l'importante transformation de la page 17, nous avons substitué à l'emploi des imaginaires une méthode géométrique plus claire, et dont l'idée nous a été suggérée par une Note de M. Hopff, de Bonn, insérée au n° 1353 des *Astronomische Nachrichten*.

§ I.

Quand on rapporte à un système de plans rectangulaires fixes les coordonnées d'une planète, en tenant compte de la fonction perturbatrice, on obtient trois équations différentielles du second ordre en x, y, z.

Si l'on néglige la fonction perturbatrice et qu'on appelle ξ, η, ζ les coordonnées de l'astre, les équations différentielles deviennent celles du mouvement elliptique, et l'on obtient alors ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\zeta}{dt}$ en fonction du temps et de six éléments constants a, b, c, ...

La théorie de la variation des constantes arbitraires permet alors de satisfaire aux premières équations en prenant pour $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ les mêmes expressions que pour $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, à condition d'y considérer les éléments a, b, c, ... comme des fonctions du temps.

Il s'ensuit que, à chaque instant, les coordonnées de la planète et les composantes de sa vitesse coïncident avec celles d'un point situé sur une ellipse et dont les éléments sont dits *éléments osculateurs de la planète à cet instant.*

Dans notre méthode, nous prendrons pour plans coordonnés un système en mouvement, mais soumis à cette condition que les valeurs des coordonnées et de leurs dérivées premières, par rapport au temps, aient la même forme dans le mouvement troublé que dans le mouvement non troublé.

Un pareil système a été nommé par Hansen *système de coordonnées idéales*.

Le plan mobile des XY, que nous adopterons, sera précisément le plan des éléments osculateurs de l'astre.

Digitized by Google

Des équations nous feront connaître les coordonnées r et v (rayon vecteur et angle de ce rayon avec l'axe des X), et d'autres les variables qui fixent la position du plan des XY.

Pour arriver à ces valeurs de r et de v, nous partirons des éléments elliptiques à l'origine, et, par un choix particulier de variables, nous obtiendrons très-simplement nos inconnues.

Pour conclure la latitude b, la longitude l et, par suite, les valeurs de x, y et z rapportées au plan fixe, nous transformerons les formules connues en d'autres, d'application extrêmement commode, dans lesquelles les grandeurs du second ordre seront mises en évidence et pourront, dans la plupart des cas, être négligées.

Prenons pour unité de masse celle du Soleil, appelons m la masse de la planète troublée, m', m'', ... celles des planètes perturbatrices, k^2 la constante de l'attraction, c'est-à-dire l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance; les équations du mouvement de la planète troublée, rapportées à des axes rectangulaires fixes passant par le centre du Soleil, peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{x}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dx}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{y}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dy}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{z}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dz}, \end{cases}$$

en posant

$$(2)\qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right) + \frac{m''}{1+m}\left(\quad\right) + \ldots,$$

Δ étant la distance des planètes, m et m', ... Soit XYZ un autre système de coordonnées rectangulaires; on aura, α, α', α'' étant les cosinus des angles que fait l'axe des X avec les axes primitifs, etc.,

$$(3)\qquad \begin{cases} X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Nous définirons *système de coordonnées idéales* tout système tel, que les coordonnées de la planète troublée et leurs dérivées premières, par rapport au temps, aient la même forme que dans le mouvement non troublé.

Les cosinus α, α', α'', ... étant des fonctions du temps, les dérivées de X,

Digitized by Google

Y, Z deviennent

$$\frac{dX}{dt} = \alpha\frac{dx}{dt} + \alpha'\frac{dy}{dt} + \alpha''\frac{dz}{dt} + x\frac{d\alpha}{dt} + y\frac{d\alpha'}{dt} + z\frac{d\alpha''}{dt},$$

$$\frac{dY}{dt} = \beta\frac{dx}{dt} + \beta'\frac{dy}{dt} + \beta''\frac{dz}{dt} + x\frac{d\beta}{dt} + y\frac{d\beta'}{dt} + z\frac{d\beta''}{dt},$$

$$\frac{dZ}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} + \gamma'\frac{dy}{dt} + \gamma''\frac{dz}{dt} + x\frac{d\gamma}{dt} + y\frac{d\gamma'}{dt} + z\frac{d\gamma''}{dt},$$

et, pour que X, Y, Z soient idéales, il faudra qu'on ait

$$(4)\qquad \begin{cases} x\dfrac{d\alpha}{dt} + y\dfrac{d\alpha'}{dt} + z\dfrac{d\alpha''}{dt} = 0, \\ x\dfrac{d\beta}{dt} + y\dfrac{d\beta'}{dt} + z\dfrac{d\beta''}{dt} = 0, \\ x\dfrac{d\gamma}{dt} + y\dfrac{d\gamma'}{dt} + z\dfrac{d\gamma''}{dt} = 0. \end{cases}$$

Telles sont les équations générales de condition pour qu'un système de coordonnées soit idéal.

Ces équations (4) se réduisent à deux; et, comme il faut trois conditions pour définir un système d'axes, on voit qu'il y aura une infinité de systèmes de coordonnées idéales.

Pour le montrer, je remarque qu'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z. \end{cases}$$

Substituant dans (4), et posant

$$(6)\qquad \begin{cases} \beta\dfrac{d\alpha}{dt} + \beta'\dfrac{d\alpha'}{dt} + \beta''\dfrac{d\alpha''}{dt} = r, \\ \alpha\dfrac{d\gamma}{dt} + \alpha'\dfrac{d\gamma'}{dt} + \alpha''\dfrac{d\gamma''}{dt} = q, \\ \gamma\dfrac{d\beta}{dt} + \gamma'\dfrac{d\beta'}{dt} + \gamma''\dfrac{d\beta''}{dt} = p, \end{cases}$$

il vient

$$(7)\qquad \begin{cases} qZ - rY = 0, \\ rX - pZ = 0, \\ pY - qX = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

équations dont l'une est une conséquence des deux autres. Or p, q, r sont proportionnels aux cosinus des angles que fait avec les axes des X, Y, Z l'axe instantané de rotation du système; donc, en vertu des relations (7), on arrive à cette conclusion remarquable :

Dans un système de coordonnées idéales, l'axe instantané de rotation coïncide avec le rayon vecteur de la planète.

Cette proposition se présente, du reste, immédiatement comme une conséquence des équations (4). En effet, les équations en $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ expriment alors que la vitesse relative coïncide avec la vitesse absolue. La vitesse du point coïncident du système est donc nulle à chaque instant, ce qui montre que ce point se trouve sur l'axe instantané de rotation.

La troisième condition étant arbitraire, je prendrai $Z = 0$, c'est-à-dire que le plan des XY contiendra à chaque instant le rayon vecteur. On a aussi $\frac{dZ}{dt} = 0$, ce qui prouve que la vitesse relative et, par suite, la vitesse absolue se trouvent également dans ce plan. Ce plan des XY, contenant la tangente à la courbe et le rayon vecteur, est donc le plan des éléments osculateurs de la planète troublée.

Par suite de l'hypothèse $Z = 0$, la première des équations (7) donne $r = 0$, c'est-à-dire

$$(8) \qquad \begin{cases} \beta\, d\alpha + \beta'\, d\alpha' + \beta''\, d\alpha'' = 0, \\ \alpha\, d\beta + \alpha'\, d\beta' + \alpha''\, d\beta'' = 0, \end{cases}$$

dont l'une est une conséquence de l'autre.

On voit alors que les variations des quatre cosinus α, β, α', β' sont maintenant liées à celles de α'' et β''.

Combinons, en effet, les deux équations précédentes avec les suivantes :

$$\alpha\, d\alpha + \alpha'\, d\alpha' + \alpha''\, d\alpha'' = 0,$$
$$\beta\, d\beta + \beta'\, d\beta' + \beta''\, d\beta'' = 0;$$

il en résulte, par exemple,

$$d\alpha = \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}\, d\alpha''.$$

Or, d'après une propriété bien connue, on a

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \gamma,$$
$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = \gamma'';$$

Digitized by Google

d'où

$$(9)\qquad \begin{cases} d\alpha = \dfrac{\gamma}{\gamma''}\,d\alpha'', \quad d\beta = \dfrac{\gamma}{\gamma''}\,d\beta'', \\ d\alpha' = \dfrac{\gamma'}{\gamma''}\,d\alpha'', \quad d\beta' = \dfrac{\gamma'}{\gamma''}\,d\beta''. \end{cases}$$

Il nous faut chercher les équations qui permettront de déterminer X, Y, α'' et β''.

La fonction Ω est exprimée en fonction de x, y et z; cherchons ses dérivées par rapport à nos nouvelles variables X, Y, Z.

On a

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z. \end{aligned}$$

Pour avoir $\frac{d\Omega}{dX}$, regardons x, y et z comme des fonctions de X, et l'on aura

$$\frac{dx}{dX} = \alpha, \quad \frac{dx}{dY} = \beta, \quad \frac{dx}{dZ} = \gamma;$$

de même

$$\frac{dy}{dX} = \alpha', \quad \frac{dy}{dY} = \beta', \quad \frac{dy}{dZ} = \gamma';$$

$$\frac{dz}{dX} = \alpha'', \quad \frac{dz}{dY} = \beta'', \quad \frac{dz}{dZ} = \gamma'',$$

et l'on a

$$\frac{d\Omega}{dX} = \frac{d\Omega}{dx}\frac{dx}{dX} + \frac{d\Omega}{dy}\frac{dy}{dX} + \frac{d\Omega}{dz}\frac{dz}{dX},$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dX} = \alpha\dfrac{d\Omega}{dx} + \alpha'\dfrac{d\Omega}{dy} + \alpha''\dfrac{d\Omega}{dz}, \\ \dfrac{d\Omega}{dY} = \beta\dfrac{d\Omega}{dx} + \beta'\dfrac{d\Omega}{dy} + \beta''\dfrac{d\Omega}{dz}, \\ \dfrac{d\Omega}{dZ} = \gamma\dfrac{d\Omega}{dx} + \gamma'\dfrac{d\Omega}{dy} + \gamma''\dfrac{d\Omega}{dz}, \end{cases}$$

et, d'après le système de coordonnées choisi, il faudra ici, après la substitution des valeurs de x, y et z, faire $Z = 0$.

Avec l'hypothèse $Z = 0$, il vient simplement

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Prenons les dérivées par rapport au temps, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\frac{dX}{dt} + \beta\frac{dY}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha'\frac{dX}{dt} + \beta'\frac{dY}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha''\frac{dX}{dt} + \beta''\frac{dY}{dt}, \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad (10) \left\{\begin{aligned} X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\beta}{dt} &= 0, \\ X\frac{d\alpha'}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} &= 0, \\ X\frac{d\alpha''}{dt} + Y\frac{d\beta''}{dt} &= 0, \end{aligned}\right.$$

toujours en vertu de cette proposition que la vitesse absolue coïncide avec la vitesse relative.

Différentions encore par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha\frac{d^2X}{dt^2} + \beta\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{dY}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha'\frac{d^2X}{dt^2} + \beta'\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dY}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \alpha''\frac{d^2X}{dt^2} + \beta''\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dY}{dt}, \end{aligned}$$

d'où l'on tirera $\frac{d^2X}{dt^2}$ et $\frac{d^2Y}{dt^2}$.

Multiplions la première par α, la deuxième par α', la troisième par α'', et ajoutons, il viendra

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha'\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha''\frac{d^2z}{dt^2},$$

de même

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \beta\frac{d^2x}{dt^2} + \beta'\frac{d^2y}{dt^2} + \beta''\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si l'on multiplie les trois équations respectivement par γ, γ' et γ'', et que l'on ajoute, il viendra

$$\gamma\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma''\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\gamma\frac{d\alpha}{dt} + \gamma'\frac{d\alpha'}{dt} + \gamma''\frac{d\alpha''}{dt}\right)\frac{dX}{dt} + \left(\gamma\frac{d\beta}{dt} + \gamma'\frac{d\beta'}{dt} + \gamma''\frac{d\beta''}{dt}\right)\frac{dY}{dt},$$

et, en vertu des équations (9), remplaçant $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\beta$, $d\beta'$ par leurs valeurs en fonction de $d\alpha''$ et $d\beta''$,

$$\frac{1}{\gamma''}\left(\frac{d\alpha''}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dY}{dt}\right) = \gamma\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma''\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On a de plus

$$r^2 = X^2 + Y^2.$$

Digitized by Google

Il est facile maintenant d'obtenir les dérivées des nouvelles variables X, Y, α'', β''.

Multiplions les équations (1) respectivement par $(\alpha, \alpha', \alpha'')$, (β, β', β''), $(\gamma, \gamma', \gamma'')$, et ajoutons, il viendra

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{X}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dX}, \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{Y}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dY}, \\ \dfrac{dX}{dt}\dfrac{d\alpha''}{dt} + \dfrac{dY}{dt}\dfrac{d\beta''}{dt} = k^2(1+m)\gamma''\dfrac{d\Omega}{dZ}. \end{cases}$$

Pour déterminer α'' et β'', joignons à la dernière des équations (11) la troisième des équations (10), savoir

$$X\frac{d\alpha''}{dt} + Y\frac{d\beta''}{dt} = 0;$$

de ces deux équations nous tirerons les valeurs de $\frac{d\alpha''}{dt}$ et $\frac{d\beta''}{dt}$

$$\frac{d\alpha''}{dt} = -\frac{\gamma''Yk^2(1+m)\frac{d\Omega}{dZ}}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}},$$

$$\frac{d\beta''}{dt} = \frac{\gamma''Xk^2(1+m)\frac{d\Omega}{dZ}}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}}.$$

Posant

$$\frac{k^2(1+m)}{X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}} = \lambda,$$

il vient

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha''}{dt} = -\lambda\gamma''Y\dfrac{d\Omega}{dZ}, \\ \dfrac{d\beta''}{dt} = \lambda\gamma''X\dfrac{d\Omega}{dZ}. \end{cases}$$

Les équations différentielles (9), (11) et (12) déterminent les variables X, Y, α, β, γ, ...

A ces variables nous allons en substituer d'autres.

Au lieu de X et de Y, introduisons les deux coordonnées polaires r et v, r étant

Digitized by Google

le rayon vecteur de l'astre et v l'angle, dans le plan des XY, de ce rayon vecteur avec l'axe des X positifs, angle compté de 0 à 360° dans le sens du mouvement.

On a

$$X = r\cos v,$$
$$Y = r\sin v;$$
$$\frac{dX}{dt} = \cos v\,\frac{dr}{dt} - r\sin v\,\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{dY}{dt} = \sin v\,\frac{dr}{dt} + r\cos v\,\frac{dv}{dt};$$

d'où

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \cos v\,\frac{d^2r}{dt^2} - r\sin v\,\frac{d^2v}{dt^2} - 2\sin v\,\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt} - r\cos v\,\frac{dv^2}{dt^2},$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \sin v\,\frac{d^2r}{dt^2} + r\cos v\,\frac{d^2v}{dt^2} + 2\cos v\,\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt} - r\sin v\,\frac{dv^2}{dt^2}.$$

Cherchons les dérivées de la fonction perturbatrice par rapport à r et à v, on a

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\Omega}{dX}\frac{dX}{dr} + \frac{d\Omega}{dY}\frac{dY}{dr} = \frac{d\Omega}{dX}\cos v + \frac{d\Omega}{dY}\sin v,$$
$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{d\Omega}{dX}\frac{dX}{dv} + \frac{d\Omega}{dY}\frac{dY}{dv} = -\frac{d\Omega}{dX}r\sin v + \frac{d\Omega}{dY}r\cos v;$$

remplaçant $\frac{d\Omega}{dX}$ et $\frac{d\Omega}{dY}$ par leurs valeurs tirées des équations (11), nous arrivons aux équations suivantes en r et v :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + k^2(1+m)\dfrac{1}{r^2} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dr}, \\[2ex] r^2\dfrac{d^2v}{dt^2} + 2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dv}{dt} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dv}. \end{cases}$$

Remarques :

1° On a

$$X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = r^2\frac{dv}{dt} = \frac{k^2(1+m)}{\lambda}.$$

2° Des équations, qui donnent $\frac{d\Omega}{dr}$ et $\frac{d\Omega}{dv}$, on tire facilement

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dX} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Omega}{dv}\sin v + \dfrac{d\Omega}{dr}\cos v, \\[2ex] \dfrac{d\Omega}{dY} = +\dfrac{1}{r}\dfrac{d\Omega}{dv}\cos v + \dfrac{d\Omega}{dr}\sin v. \end{cases}$$

Digitized by Google

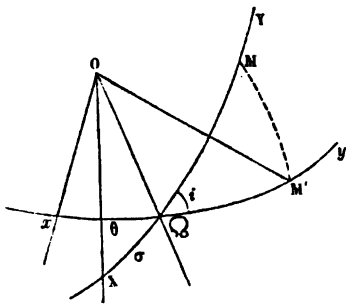
Les équations (13) détermineront ainsi r et v, que nous substituons à X et à Y.

Au lieu de déterminer la position des axes mobiles au moyen des neuf cosinus α, α', ..., nous pouvons choisir d'autres variables en nombre moindre.

Figurons le plan fixe des xy et le plan des XY à un instant quelconque.

Soit (*fig.* 1) σ l'angle, dans le plan des XY, de l'axe des X avec la ligne allant

Fig. 1.



de l'origine au nœud ascendant; alors $v - \sigma$ sera ce que l'on appelle l'*argument de la latitude*.

Soient b l'angle que le rayon vecteur fait avec le plan des xy; l l'angle que fait la projection du rayon vecteur avec l'axe positif des x (b et l sont ainsi la latitude et la longitude de l'astre).

Enfin, soit θ l'angle de l'axe des x avec la ligne des nœuds. Alors $l - \theta$ est l'angle de cette ligne des nœuds avec la projection du rayon vecteur. Soit i l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan fixe.

Le triangle sphérique MΩM' donne

$$\sin b = \sin i \sin(v - \sigma),$$

$$\sin(l - \theta) = \operatorname{tang} b \frac{\cos i}{\sin i} = \frac{\sin b}{\cos b} \frac{\cos i}{\sin i} = \frac{1}{\cos b} \frac{\sin b}{\sin i} \cos i,$$

d'où

$$(15) \qquad \begin{cases} \cos b \sin(l - \theta) = \sin(v - \sigma) \cos i, \\ \cos b \cos(l - \theta) = \cos(v - \sigma), \\ \sin b = \sin i \sin(v - \sigma); \end{cases}$$

de plus

$$\begin{cases} x = r \cos b \cos l, \\ y = r \cos b \sin l, \\ z = r \sin b. \end{cases}$$

Digitized by Google

Une fois que l'on aura déterminé r, v, θ, i et σ, on en déduira l et b, et, par suite, x, y et z.

Cherchons les équations différentielles en θ, i et σ.

De même qu'il existe une relation différentielle entre les cosinus α, β; α', β'; α'', β'',

$$\beta\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta''\frac{dx''}{dt}=0,$$

il y aura une relation pareille entre θ, σ et i.

Pour la trouver, différentions les valeurs suivantes de α, α', α''

$$\begin{cases}\alpha=\cos\theta\cos\sigma+\sin\theta\sin\sigma\cos i,\\ \alpha'=\cos\sigma\sin\theta-\sin\sigma\cos\theta\cos i,\\ \alpha''=-\sin\sigma\sin i;\end{cases}$$

il viendra

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\beta\frac{d\sigma}{dt}-\alpha'\frac{d\theta}{dt}-\gamma\sin\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\alpha'}{dt}=-\beta'\frac{d\sigma}{dt}+\alpha\frac{d\theta}{dt}-\gamma'\sin\sigma\frac{di}{dt},$$

$$\frac{d\alpha''}{dt}=-\beta''\frac{d\sigma}{dt}-\gamma''\sin\sigma\frac{di}{dt}.$$

Multiplions par β, β', β'', et ajoutons, il viendra

$$0=-\frac{d\sigma}{dt}+(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{d\theta}{dt},$$

d'où

$$\frac{d\sigma}{dt}=(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{d\theta}{dt}=\gamma''\frac{d\theta}{dt},$$

(16) $$\frac{d\sigma}{dt}=\cos i\frac{d\theta}{dt}.$$

Telle est l'équation de condition des variables i, θ et σ.

Si nous prenons les deux équations

$$\begin{cases}\sin i\sin\sigma=-\alpha'',\\ \sin i\cos\sigma=\beta'',\end{cases}$$

nous en déduisons, par la différentiation et en tenant compte des équa-

Digitized by Google

tions (12)

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda(X\cos\sigma + Y\sin\sigma)\dfrac{d\Omega}{dZ} = \lambda r\cos(\nu - \sigma)\dfrac{d\Omega}{dZ}, \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = \lambda\cot i(-X\sin\sigma + Y\cos\sigma)\dfrac{d\Omega}{dZ} = \lambda\cot i\, r\sin(\nu - \sigma)\dfrac{d\Omega}{dZ}. \end{cases}$$

Les équations (13), (16) et (17), prises simultanément, déterminent les variables r, ν, θ, i et σ. Comptons les constantes arbitraires introduites par l'intégration. Trois sont données par les équations (16) et (17), qui sont les valeurs de i, θ et σ au temps $t = 0$, et quatre par les équations (13), qui sont les valeurs de r, ν, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, à la même époque.

On a donc en tout sept constantes, tandis que l'intégration des équations (1) n'en donne que six. Cette circonstance est facile à expliquer, et vient de ce que la position de l'axe des X dans le plan des XY est complétement arbitraire; la septième constante déterminant cette position. Comme on peut la choisir à volonté, l'hypothèse la plus simple consiste à admettre qu'à l'époque $t = 0$ l'axe positif des X fait avec la ligne des nœuds le même angle que l'axe positif de x. Si l'on désigne les valeurs initiales de i, θ et σ par i_0, θ_0 et σ_0, la condition énoncée plus haut se traduit par $\sigma_0 = \theta_0$, ce qui réduit à six le nombre des constantes arbitraires.

Les équations (16), (17) et les deux premières du groupe (11), dont l'ensemble constitue la solution complète du problème, peuvent s'obtenir sur-le-champ, d'après la théorie du mouvement relatif, au moyen de la méthode suivante, que M. Briot a bien voulu m'indiquer.

Pour obtenir les équations différentielles du mouvement relatif d'un corps, on sait qu'il faut ajouter aux forces effectives agissant sur le corps deux forces fictives, l'une, la force d'inertie du point coïncidant du système, et l'autre, la force de Coriolis ou la force centrifuge composée.

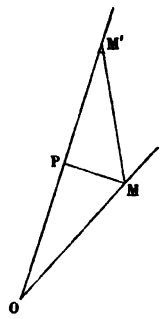
Soient (*fig.* 2) M et M′ les positions de la planète aux temps t et t'; les axes instantanés de rotation à ces deux époques sont OM, OM′. La vitesse du point coïncidant M au temps t est nulle; au temps t', elle est la même que si les axes mobiles tournaient autour de la droite OM′ avec une vitesse angulaire ω'; elle est perpendiculaire au plan MOM′ et égale au produit de la vitesse angulaire ω' par la perpendiculaire MP, abaissée du point M sur la droite OM′. La variation de la vitesse du point coïncidant pendant l'intervalle de temps $t' - t$ est donc

$$\omega' MP = \omega' MM' \sin MM'P.$$

Digitized by Google

Son accélération au temps t est la limite du rapport $\omega' \frac{MM'}{t'-t} \sin MM'P$, quand l'intervalle de temps tend vers zéro. Elle est égale à $\omega V \sin \delta$, V étant la vitesse

Fig. 2.



de la planète; δ l'angle de cette vitesse avec le rayon vecteur; elle est perpendiculaire au plan passant par le rayon vecteur OM et la vitesse V, et, par conséquent, parallèle à l'axe OZ, mais en sens contraire. La force d'inertie, pour l'unité de masse, étant égale et contraire à cette accélération, est dirigée dans le sens OZ.

La seconde force fictive a pour expression $2\omega V \sin \delta$; elle est aussi parallèle à OZ, mais en sens contraire. La résultante de ces deux forces est donc parallèle à OZ et égale à $-\omega V \sin \delta$; elle n'aura pas d'influence sur le mouvement relatif de la planète dans le plan mobile XOY, et, par conséquent, les équations de ce mouvement relatif seront les mêmes que si le plan était fixe; on obtient ainsi les deux équations

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{X}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dX}, \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + k^2(1+m)\dfrac{Y}{r^3} = k^2(1+m)\dfrac{d\Omega}{dY}. \end{cases}$$

En projetant toutes les forces sur l'axe OZ, on obtient la troisième équation

$$0 = \frac{d^2Z}{dt^2} = k^2(1+m)\frac{d\Omega}{dZ} - \omega V \sin \delta;$$

d'où l'on déduit

$$(b) \qquad \omega = \lambda r \frac{d\Omega}{dZ}.$$

L'application des trois premières équations d'Euler, relatives au mouvement

Digitized by Google

d'un système d'axes rectangulaires mobiles, donne immédiatement

$$\left\{\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= p\cos\sigma + q\sin\sigma = \omega\cos(\nu-\sigma),\\ \frac{d\sigma}{dt} &= \cot i\,(-p\sin\sigma + q\cos\sigma) = \omega\cot i\sin(\nu-\sigma),\\ \sin i\,\frac{d\theta}{dt} &= -p\sin\sigma + q\cos\sigma = \omega\sin(\nu-\sigma),\end{aligned}\right.$$

en désignant par p et q les projections de la vitesse angulaire ω sur les axes OX et OY; remarquant que la projection de ω sur OZ est nulle et que l'angle σ est compté ici en sens négatif, à partir de la ligne des nœuds.

Si l'on remplace ω par sa valeur, on a

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \lambda r\,\frac{d\Omega}{dZ}\cos(\nu-\sigma),\\ \frac{d\sigma}{dt} &= \lambda r\cot i\,\frac{d\Omega}{dZ}\sin(\nu-\sigma),\\ \sin i\,\frac{d\theta}{dt} &= \lambda r\,\frac{d\Omega}{dZ}\sin(\nu-\sigma).\end{aligned}\right.$$

Des deux dernières, on déduit

$$\frac{d\sigma}{dt} = \cos i\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Nous trouvons ainsi rapidement les cinq équations (a) et (c), qui déterminent X, Y ou r et ν et i, θ, σ.

§ II.

Connaissant ν, i, θ et σ, nous pourrons en conclure l et b à l'aide des équations (15).

Seulement ces équations ne sont pas les plus simples, parce que les valeurs complètes de θ, i et σ doivent y être substituées, et la partie constante ne se séparerait pas de la partie variable introduite par les perturbations. Toutefois, une transformation convenable va nous permettre d'arriver à cette séparation.

Aux formules ci-après,

$$\left\{\begin{aligned} \cos b\cos(l-\theta) &= \cos(\nu-\sigma),\\ \cos b\sin(l-\theta) &= \sin(\nu-\sigma)\cos i,\\ \sin b &= \sin i\sin(\nu-\sigma),\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

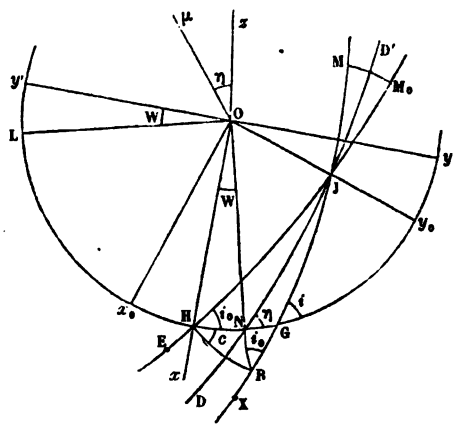
nous allons démontrer qu'on peut substituer les suivantes :

$$\begin{cases} \cos b \cos(l-\theta_0) = \cos(v-g) + As \sin W, \\ \cos b \sin(l-\theta_0) = \sin(v-g)\cos i_0 - As\cos W, \\ \sin b = \sin(v-g)\sin i_0 + s, \end{cases}$$

dans lesquelles les quantités A et W sont indépendantes de v.

Pour cela, de l'origine des coordonnées comme centre, décrivons une sphère d'un rayon égal à l'unité (*fig.* 3). Le plan fixe la coupera suivant le cercle $x_0 y_0$.

Fig. 3.



Figurons sur cette sphère la trace du plan de l'orbite osculatrice à l'origine du temps, déterminé par θ_0 et i_0, et la trace du plan de l'orbite osculatrice à un instant quelconque, déterminé par θ et i. Les deux cercles se coupent en un point J.

Transportons l'axe des x de Ox_0 en OHx. Soit M la position de l'astre ou plutôt le point où la ligne menée de l'origine à l'astre rencontre la sphère. Marquons sur le premier cercle un point M_0, que j'appellerai l'*homologue* de M, et obtenu en prenant $JM_0 = JM$. Soit de même $JE = JX$, en sorte qu'on aura $M_0OE = v$. Soit $JB = JH$, et menons le plan bissecteur de l'angle J.

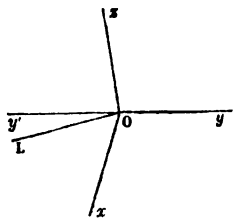
La droite M_0M, étant perpendiculaire à ce plan, a une direction bien déterminée et indépendante de l'angle v. Appelons W le petit angle HON, cet angle étant compté à partir de HO de zéro à 360 degrés dans le sens du mouvement.

Menons par le centre de la sphère une parallèle $O\mu$ à la droite M_0M, c'est-à-dire une perpendiculaire au plan bissecteur DND'. Le plan passant par $O\mu$ et Oz coupera le plan xy suivant une droite OL, située à 90 degrés de ON, puis-

Digitized by Google

que ON est perpendiculaire aux deux droites Oμ et Oz. Conséquemment on

Fig. 4.



aura (*fig.* 4) y'OL = W. Appelons η l'angle toujours aigu que fait le plan bissecteur avec le plan des xy.

Si nous joignons N et B par un arc de grand cercle, on aura NB = W, et l'angle NBG = i_0.

Nous pouvons écrire alors

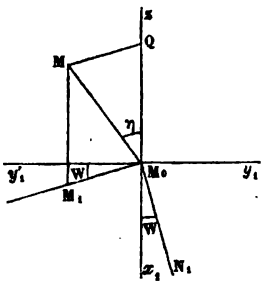
$$x = \cos b \cos (l - \theta_0),$$
$$y = \cos b \sin (l - \theta_0),$$
$$z = \sin b;$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du point M_0, on a, en posant HE = g,

$$x_0 = \cos (\nu - g),$$
$$y_0 = \sin (\nu - g) \cos i_0,$$
$$z_0 = \sin (\nu - g) \sin i_0.$$

Si nous transportons les axes parallèlement à eux-mêmes (*fig.* 5) au point M_0,

Fig. 5.



on aura, en appelant x_1, y_1, z_1 les nouvelles coordonnées du point M et po-

Digitized by Google

sant

$$M_0Q = Z - Z_0 = s, \quad \operatorname{tang}\eta = A,$$

$$M_0M_1 = s\operatorname{tang}\eta = As,$$

$$\begin{cases} x_1 = \quad As\sin W, \\ y_1 = -As\cos W, \\ z_1 = s, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1, \\ y = y_0 + y_1, \\ z = z_0 + z_1, \end{cases}$$

d'où, par substitution,

$$\begin{cases} \cos b\cos(l - \theta_0) = \cos(\nu - g) + As\sin W, \\ \cos b\sin(l - \theta_0) = \sin(\nu - g)\cos i_0 - As\cos W, \\ \sin b = \sin(\nu - g)\sin i_0 + s. \end{cases}$$

Toutefois, pour arriver aux équations mêmes de Hansen, qui diffèrent un peu de ces dernières, je remarque que, au lieu de considérer un plan fixe dans lequel x_0H est constant et égal à θ_0, EH ou g étant variable, je puis choisir un plan d'inclinaison toujours égale à i_0, mais pour lequel EH sera constant et égal à θ_0, tandis que x_0H, au contraire, variera.

Considérons, en effet, le plan mobile XBM, et cherchons à en déduire la position de ce nouveau plan adopté.

A partir du point X, nous prendrons $XB = \theta_0$; nous ferons au point B, avec BG, un angle égal à i_0; à partir du point N ainsi obtenu nous prendrons sur Nx_0 une longueur $NH = NB$, et par le point H nous mènerons un grand cercle d'inclinaison i_0. On voit bien alors que, si l'on prend $JE = JX$, on aura $HE = BX = \theta_0$.

Il suffit donc, pour avoir les équations résultant de l'emploi de ce nouveau plan auxiliaire, de remplacer dans nos considérations précédentes θ_0 par G (G étant une nouvelle variable) et g par θ_0. Posant $G = \theta_0 + \Gamma$, nous obtiendrons les formules définitives

$$(18) \qquad \begin{cases} \cos b\cos(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos(\nu - \theta_0) + As\sin W, \\ \cos b\sin(l - \theta_0 - \Gamma) = \sin(\nu - \theta_0)\cos i_0 - As\cos W, \\ \sin b = \sin(\nu - \theta_0)\sin i_0 + s. \end{cases}$$

Reste à exprimer les quantités A, W et Γ en fonction de σ, θ et i.

Digitized by Google

On a

$$\cos BNG = \cos(\pi - 2\eta) = -\cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0),$$

d'où

$$\cos 2\eta.$$

Posons

$$x = 1 + \cos 2\eta = 2\cos^2\eta = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0);$$

le triangle NBG donne

$$\sin W = \frac{\sin i \sin(\sigma - \theta_0)}{\sin 2\eta}.$$

Multipliant par tang η ou A, il vient

$$A \sin W = \frac{\sin i \sin(\sigma - \theta_0)}{x};$$

de même

$$\cot W \sin(\sigma - \theta_0) = \cos(\sigma - \theta_0)\cos i_0 + \sin i_0 \cot i.$$

Remplaçant sin W par sa valeur,

$$\cos W \sin 2\eta = \cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \theta_0) + \sin i_0 \cos i;$$

or

$$\sin 2\eta = 2A\cos^2\eta;$$

d'où

$$A \cos W = \frac{\cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \theta_0) + \sin i_0 \cos i}{x}.$$

Dans le triangle HBG, on a

$$HG = \theta - \theta_0 - \Gamma.$$

Posons, pour abréger,

$$HG = \alpha \quad \text{et l'angle} \quad BHG = C;$$

on a alors

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(i_0 + C)} = \frac{\sin(\sigma - \theta_0)}{\sin C},$$

ou

$$\sin\alpha = \sin(\sigma - \theta_0)(\sin i_0 \cot C + \cos i_0).$$

Remplaçons cot C par sa valeur A cos W, il vient

$$\sin i_0 \cot C + \cos i_0 = \frac{\cos i + \cos i_0}{x},$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{(\cos i + \cos i_0)\sin(\sigma - \theta_0)}{x}.$$

Digitized by Google

On a, de plus,

$$\cot\alpha \sin(\sigma - \theta_0) = \cos(\sigma - \theta_0)\cos i + \sin i \cot(i_0 + C),$$
$$\cot\alpha \sin(\sigma - \theta_0)\sin(i_0 + C) = \sin(i_0 + C)\cos(\sigma - \theta_0)\cos i + \sin i \cos(i_0 + C);$$

or on a

$$\frac{\sin(i_0 + C)}{\sin\alpha} = \frac{\sin C}{\sin(\sigma - \theta_0)},$$

d'où

$$\cos\alpha \sin C = \sin(i_0 + C)\cos(\sigma - \theta_0)\cos i + \sin i \cos(i_0 + C),$$
$$\cos\alpha = \cos i \cos(\sigma - \theta_0)(\sin i_0 \cot C + \cos i_0) + \sin i(\cos i_0 \cot C - \sin i_0).$$

La première parenthèse est connue d'après ce qui précède; pour obtenir la seconde, remplaçons $\cot C$ par sa valeur, et nous aurons

$$\cos i_0 \cot C - \sin i_0 = \frac{\cos(\sigma - \theta_0)\sin i - \sin i_0}{x},$$

et, par suite,

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\sigma - \theta_0)(1 + \cos i \cos i_0) - \sin i \sin i_0}{x}.$$

Nous arrivons ainsi aux formules suivantes :

$$(19) \qquad x = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0),$$

$$(20) \qquad \begin{cases} A \sin W = \dfrac{\sin i \sin(\sigma - \theta_0)}{x}, \\ A \cos W = \dfrac{\cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \theta_0) + \sin i_0 \cos i}{x}, \end{cases}$$

$$(21) \qquad \begin{cases} \sin(\theta - \theta_0 - \Gamma) = \dfrac{(\cos i + \cos i_0)\sin(\sigma - \theta_0)}{x}, \\ \cos(\theta - \theta_0 - \Gamma) = \dfrac{\cos(\sigma - \theta_0)(1 + \cos i \cos i_0) - \sin i \sin i_0}{x}. \end{cases}$$

Examinons les ordres de grandeur de ces diverses quantités, en considérant comme du premier ordre les variations introduites par les perturbations Δi, $\Delta\theta$, $\Delta\sigma$.

Puisqu'on a $\sin b = \sin i \sin(\nu - \sigma)$, il en résulte

$$s = \sin i \sin(\nu - \sigma) - \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0);$$

s est du premier ordre.

Digitized by Google

A sin W est de même du premier ordre.

Ces deux propositions sont, du reste, évidentes géométriquement.

Pour Γ, prenons la première équation du groupe (18), et désignons par β, β', β'', ... des quantités du premier ordre. On peut écrire

$$\cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos(\nu - \theta_0) + \beta^2.$$

Développons, en négligeant Γ^2 et appelant P le coefficient de Γ,

$$P\Gamma = \cos(\nu - \theta_0) - \cos b \cos(l - \theta_0) + \beta^2,$$
$$P\Gamma = \cos\left(\widehat{\nu - \sigma} + \widehat{\sigma - \theta_0}\right) - \cos b \cos\left(\widehat{l - \theta} + \widehat{\theta - \theta_0}\right) + \beta^2;$$

développant les sinus et cosinus de $(\sigma - \theta_0)$ et $(\theta - \theta_0)$ en séries,

$$P\Gamma = \cos(\nu - \sigma) - \cos b \cos(l - \theta) + \cos b \sin(l - \theta)(\theta - \theta_0) - \sin(\nu - \sigma)(\sigma - \theta_0) + \beta'^2;$$

or on a

$$\cos(\nu - \sigma) = \cos b \cos(l - \theta)$$

et

$$\sin(\nu - \sigma)\cos i = \cos b \sin(l - \theta);$$

il vient donc

$$P\Gamma = \sin(\nu - \sigma)\left[(\theta - \theta_0)\cos i - (\sigma - \theta_0)\right] + \beta'^2,$$
$$P\Gamma = \sin(\nu - \sigma)\left[(\theta - \theta_0)\cos i_0 - (\sigma - \theta_0)\right] + \beta''^2;$$

mais on a

$$d\sigma = d\theta \cos i,$$

d'où

$$\sigma - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \cos i = (\theta - \theta_0)\cos i_1,$$
$$(\sigma - \theta_0) = (\theta - \theta_0)\cos i_0 + \beta'''^2,$$

$\cos i_1$ étant une valeur moyenne de $\cos i$ entre $\cos i_0$ et $\cos i$, laquelle ne diffère de $\cos i_0$ que d'une quantité du premier ordre; il en résulte

$$P\Gamma = \sin(\nu - \sigma)\beta_1^2.$$

Ainsi Γ est du second ordre.

Nous allons donner une forme un peu plus commode aux équations (18).

Digitized by Google

Posons

$$\sin i \sin(\sigma - \theta_0) = p,$$
$$\sin i \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i_0 = q,$$

quantités du premier ordre. On aura alors

$$\varkappa = \cos i_0 (\cos i + \cos i_0) - q \sin i_0,$$
$$s = q \sin(\nu - \theta_0) - p \cos(\nu - \theta_0);$$

or on a

$$A \cos W = \frac{\sin i_0 \cos i + (q + \sin i_0) \cos i_0}{\varkappa},$$

d'où l'on déduit

$$A \cos W = \operatorname{tang} i_0 + \frac{q}{\varkappa \cos i_0}.$$

Les équations (18) deviennent alors

$$(22) \quad \begin{cases} \cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos i_0 \sin(\nu - \theta_0) - s\left(\operatorname{tang} i_0 + \dfrac{q}{\varkappa \cos i_0}\right), \\ \cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) = \cos(\nu - \theta_0) + \dfrac{sp}{\varkappa}, \\ \sin b = \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0) + s. \end{cases}$$

Dans le plus grand nombre des cas, les quantités du second ordre Γ, $\frac{sp}{\varkappa}$, $\frac{sq}{\varkappa \cos i_0}$ seront négligeables, et les formules donnant l et b deviendront extrêmement simples.

Nous pouvons dès à présent apprécier l'esprit de la méthode. Pour la solution complète du problème, il nous faut connaître, outre r et ν, les expressions de s, Γ, p et q. Nous laisserons de côté i, θ et σ, nous bornant à la variable nouvelle s. Une fois r, ν et s trouvés, nous serons en état, ainsi que nous le démontrerons, de calculer, si cela devient nécessaire, des valeurs suffisamment approchées de p, q et Γ.

Voici comment on peut calculer Γ, p et q en fonction de r, ν et s.

Reprenons les valeurs de sin et cos $(\theta - \theta_0 - \Gamma)$,

$$\sin(\theta - \theta_0 - \Gamma) = \frac{(\cos i_0 + \cos i) \sin(\sigma - \theta_0)}{\varkappa} = R,$$

$$\cos(\theta - \theta_0 - \Gamma) = \frac{(1 + \cos i_0 \cos i) \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i_0 \sin i}{\varkappa} = U.$$

Digitized by Google

Différentiant, il vient

$$\cos(\theta - \theta_0 - \Gamma)(d\theta - d\Gamma) = dR,$$
$$-\sin(\theta - \theta_0 - \Gamma)(d\theta - d\Gamma) = dU,$$

d'où

$$d\theta - d\Gamma = U dR - R dU.$$

Or

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i};$$

donc

$$d\Gamma = \frac{d\sigma}{\cos i} + R^2 d\left(\frac{U}{R}\right).$$

Développant la différentielle de $\frac{U}{R}$ et réduisant, nous obtiendrons

$$d\Gamma = -\frac{\sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}{\varkappa} di + \frac{[\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]}{\varkappa \cos i} \sin i \, d\sigma;$$

mais on a

$$\begin{cases} dp = \cos i \sin(\sigma - \theta_0) di + \sin i \cos(\sigma - \theta_0) d\sigma, \\ dq = \cos i \cos(\sigma - \theta_0) di - \sin i \sin(\sigma - \theta_0) d\sigma, \end{cases}$$

d'où

$$d\Gamma = \frac{q\,dp - p\,dq}{\varkappa \cos i}, \quad \Gamma = \int \frac{q\,dp - p\,dq}{\varkappa \cos i},$$

la constante étant déterminée de façon que, pour $t = 0$, on ait $\Gamma = 0$.

(On vérifie encore ici que Γ est du deuxième ordre, puisque q et p sont du premier ordre.)

Pour déduire les dérivées de p et q de celles de la fonction perturbatrice, je remarque qu'on a

$$\alpha'' = -\sin i \sin \sigma,$$
$$\beta'' = \sin i \cos \sigma,$$

d'où

$$p = -\alpha'' \cos \theta_0 - \beta'' \sin \theta_0,$$
$$q = -\alpha'' \sin \theta_0 + \beta'' \cos \theta_0 - \sin i_0.$$

Prenons les dérivées par rapport au temps, et remplaçons $\frac{d\alpha''}{dt}$ et $\frac{d\beta''}{dt}$ par leurs valeurs tirées du groupe (12), il vient

$$\frac{dp}{dt} = \lambda \cos i \frac{d\Omega}{dZ} r \sin(\nu - \theta_0),$$

$$\frac{dq}{dt} = \lambda \cos i \frac{d\Omega}{dZ} r \cos(\nu - \theta_0),$$

Digitized by Google

et les intégrations doivent être prises de manière que p et q soient nuls pour $t = 0$.

On peut maintenant obtenir une expression simple et commode de Γ.

Substituons, en effet, ces valeurs dans l'expression de Γ, il vient

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{dt} = \lambda r \cos i \frac{d\Omega}{dZ}\left[q \sin(\nu - \theta_0) - p \cos(\nu - \theta_0)\right],$$

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{dt} = \lambda r s \cos i \frac{d\Omega}{dZ},$$

et l'on a, avec une exactitude suffisante,

$$\Gamma = \frac{\lambda}{2\cos^2 i_0} \int rs \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) dt. \tag{23}$$

p et q peuvent aussi être exprimés en fonction de s et de sa dérivée. On a, en effet,

$$q \sin(\nu - \theta_0) - p \cos(\nu - \theta_0) = s,$$

et s étant une coordonnée idéale, puisqu'elle n'est fonction que de b et de v, on aura

$$\frac{dv}{dt} q \cos(\nu - \theta_0) + \frac{dv}{dt} p \sin(\nu - \theta_0) = \frac{ds}{dt}.$$

De ces deux équations on tire, en remplaçant $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{k\sqrt{p}}{r^2}$ (p étant le demi-paramètre),

$$\begin{cases} q = \quad s \sin(\nu - \theta_0) + \dfrac{r^2}{k\sqrt{p}} \dfrac{ds}{dt} \cos(\nu - \theta_0), \\ p = -s \cos(\nu - \theta_0) + \dfrac{r^2}{k\sqrt{p}} \dfrac{ds}{dt} \sin(\nu - \theta_0). \end{cases}$$

Ces équations peuvent être utilisées si les produits sp et sq donnent quelque chose de sensible. On aura approximativement, en posant $s = \frac{u}{r}$,

$$\begin{cases} sp = -\dfrac{u^2}{r^2} \cos(\nu - \theta_0) + \dfrac{1}{k\sqrt{p}} u \dfrac{du}{dt} \sin(\nu - \theta_0), \\ sq = \quad \dfrac{u^2}{r^2} \sin(\nu - \theta_0) + \dfrac{1}{k\sqrt{p}} u \dfrac{du}{dt} \cos(\nu - \theta_0). \end{cases}$$

Digitized by Google

§ III.

Il nous faut maintenant passer à la détermination des variables fondamentales r, v et s.

Occupons-nous d'abord de r et de v.

Considérons le plan de l'orbite à l'origine du temps, et soient

T_0, temps du passage au périhélie;
p_0, demi-paramètre;
e_0, excentricité;
π_0, longitude du périhélie,

les éléments de l'ellipse, qui représentent les coordonnées et la vitesse de l'astre à l'époque $t = 0$; f étant l'anomalie vraie et ε l'anomalie excentrique, on a les relations

$$\begin{cases} r = \dfrac{p_0}{1 + e_0 \cos f}, \\ v = f + \pi_0, \\ \varepsilon - e_0 \sin \varepsilon = \dfrac{k(t - T_0)\sqrt{1 + m}}{a_0^{\frac{3}{2}}}, \\ \tang \dfrac{1}{2} f = \sqrt{\dfrac{1 + e_0}{1 - e_0}} \tang \dfrac{1}{2} \varepsilon. \end{cases}$$

Si nulle perturbation n'intervenait, ces équations fourniraient les quantités r et v à une époque quelconque. Elles déterminent le lieu d'une planète fictive circulant dans une orbite invariable, et dont les coordonnées et la vitesse coïncident avec celles de la planète réelle à l'origine du temps.

Par un artifice de calcul, nous allons modifier ces équations de manière qu'elles représentent le lieu de la planète troublée dans le plan mobile XY à une époque quelconque.

Pour cela, partant des mêmes éléments, nous remplacerons seulement t par une fonction de t, que j'appellerai ζ, et le rayon vecteur qui en résultera, nous le multiplierons par $(1 + \nu)$, pour avoir le rayon vecteur réel. La question sera ramenée à trouver les dérivées des nouvelles variables ζ et ν.

En mettant ζ au lieu de t, les grandeurs ε, f et r prendront d'autres valeurs, que nous désignerons par η, φ et ρ.

Digitized by Google

Nous aurons alors, pour le mouvement troublé,

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta - e_0 \sin\eta = \frac{k(\zeta - T_0)\sqrt{1+m}}{a_0^{\frac{3}{2}}},\\
&\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\eta,\\
&\nu = \varphi + \pi_0,\\
&\rho = \frac{p_0}{1+e_0\cos\varphi},\\
&r = \rho(1+\nu).
\end{aligned}\right.$$

Reste à déterminer ζ et ν.

Voyons d'abord ν.

De la dernière équation, on tire

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{1}{\rho^2}\left(r\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \frac{2}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\left(\rho\frac{dr}{dt} - r\frac{d\rho}{dt}\right).$$

Or on a

$$\lambda_0 = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p_0}},$$

et, pour abréger, faisant abstraction du facteur $(1+m)$,

$$p_0 = \frac{k^2}{\lambda_0^2},\quad \rho = \frac{p_0}{1+e_0\cos\varphi} = \frac{k^2}{\lambda_0^2 + \lambda_0^2 e_0\cos\varphi},$$

et, comme $dv = d\varphi$, il vient

$$\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2} = \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{k^2}\frac{dv}{dt}.$$

Différentiant de nouveau,

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{2}{\rho^3}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \frac{\lambda_0^2 e_0\sin\varphi}{k^2}\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\lambda_0^2}{k^2}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Multiplions la première de ces deux équations par $2\frac{dr}{dt}$, et la deuxième par r, et ajoutons, il vient

$$\frac{r}{\rho^2}\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{dr}{dt} - r\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{\lambda_0^2 e_0\sin\varphi}{k^2 r}\frac{d.r^2dv}{dt} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{\lambda_0^2}{k^2}\right)r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Digitized by Google

Substituant dans $\frac{d^2\nu}{dt^2}$ nous obtenons

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right] - \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{k^2 r}\,\frac{d.r^2 dv}{dt} + \frac{\lambda_0^2}{k^2}\,r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2;$$

or les équations (13) peuvent s'écrire

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 = k^2\dfrac{d\Omega}{dr} - \dfrac{k^2}{r^2}, \\[2ex] \dfrac{d.r^2\dfrac{dv}{dt}}{dt} = k^2\dfrac{d\Omega}{dv}; \\[2ex] \text{d'où l'on déduit} \\[2ex] r^2\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{k^2}{\lambda_0} + k^2\displaystyle\int\frac{d\Omega}{dv}\,dt, \end{cases}$$

l'intégrale étant nulle au temps $t = 0$.

Substituant ces expressions dans la valeur de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, et réduisant, on a

$$(24)\quad \frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{k^2\nu}{r^3} + \frac{k^2}{\rho}\frac{d\Omega}{dr} - \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{r}\frac{d\Omega}{dv} + \frac{2k^2}{r^3}\lambda_0\int\frac{d\Omega}{dv}\,dt + \frac{k^2\lambda_0^2}{r^3}\left(\int\frac{d\Omega}{dv}\,dt\right)^2.$$

Telle est la dérivée de ν; et les deux constantes introduites par l'intégration doivent être choisies de façon que, pour $t = 0$, on ait

$$\nu = 0, \quad \frac{d\nu}{dt} = 0.$$

Pour trouver la dérivée de ζ, nous avons la relation

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{k^2}{\lambda_0\rho^2};$$

or $dv = d\varphi$: donc

$$\frac{dv}{d\zeta} = \frac{k^2}{\lambda_0\rho^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{k^2}{\lambda_0\rho^2}\frac{d\zeta}{dt};$$

et substituant à $\frac{dv}{dt}$ sa valeur tirée de la troisième équation (a),

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\left(1 + \lambda_0\int\frac{d\Omega}{dv}\,dt\right).$$

Digitized by Google

Si l'on pose $\zeta = t + \delta\zeta$, on aura

$$(25) \qquad d\frac{\delta\zeta}{dt} = \frac{\lambda_0 \int \frac{d\Omega}{d\nu}\, dt - 2\nu - \nu^2}{(1+\nu)^2}.$$

Or on a

$$\eta - e_0 \sin\eta = \mu_0 \zeta + c_0 = \mu_0 t + c_0 + \mu_0 \delta\zeta.$$

$\mu_0 \delta\zeta$ sera la perturbation de l'anomalie moyenne, ou, ce qui revient au même, de la longitude moyenne.

Pour trouver la dérivée de la troisième variable s, on a l'équation

$$\sin b = \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0) + s.$$

Multiplions les deux membres par r, et posons $rs = u$, il vient

$$u = z - r \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0).$$

Ainsi u est le changement produit par la force perturbatrice sur la coordonnée perpendiculaire au plan fixe. C'est cette variable u dont nous allons chercher la dérivée.

Différentiant deux fois par rapport au temps et introduisant les dérivées de la fonction perturbatrice, nous obtenons

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} - \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0)\left(k^2 \frac{d\Omega}{dr} - \frac{k^2}{r^2}\right) - \sin i_0 \cos(\nu - \theta_0)\, \frac{k^2}{r}\, \frac{d\Omega}{d\nu}.$$

Or on a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{k^2 z}{r^3} + k^2 \dfrac{d\Omega}{dz}, \\ \dfrac{d\Omega}{dz} = \alpha'' \dfrac{d\Omega}{dX} + \beta'' \dfrac{d\Omega}{dY} + \gamma'' \dfrac{d\Omega}{dZ}, \\ \alpha'' = -\sin\sigma \sin i, \quad \beta'' = \cos\sigma \sin i. \end{cases}$$

A l'aide de ces trois équations et de celles du groupe (14), nous déduisons

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3} u + k^2 \frac{d\Omega}{dr}\frac{u}{r} + k^2 \frac{d\Omega}{dZ} \cos i + \frac{k^2}{r}\frac{d\Omega}{d\nu}\left[\sin i \cos(\nu - \sigma) - \sin i_0 \cos(\nu - \theta_0)\right].$$

Mais on a

$$s = \sin i \sin(\nu - \sigma) - \sin i_0 \sin(\nu - \theta_0).$$

Digitized by Google

Prenant les dérivées et remarquant que s est une coordonnée idéale

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}[\sin i \cos(v - \sigma) - \sin i_0 \cos(v - \theta_0)];$$

d'où, après avoir remplacé s par $\frac{u}{r}$, $\frac{dr}{dt}$ par $\frac{d\rho}{dt}(1+\nu) + \rho\frac{dv}{dt}$ et $\frac{d\rho}{dt}$ par $\frac{\rho^2\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{k^2}\frac{dv}{dt}$, on déduira

$$\sin i \cos(v - \sigma) - \sin i_0 \cos(v - \theta_0) = \frac{\lambda}{k^2} r \frac{du}{dt} - \frac{\lambda}{k^2}\rho\frac{dv}{dt}u - u\frac{\rho^2}{k^2}(1+\nu)\frac{1}{r^2}\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi.$$

Substituons dans $\frac{d^2u}{dt^2}$, nous obtenons

$$(26)\quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}u + k^2\frac{d\Omega}{dZ}\cos i + \left(\frac{k^2}{\rho}\frac{d\Omega}{dr} - \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{r}\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{u}{1+\nu} + \lambda\frac{d\Omega}{dv}\left(\frac{du}{dt} - u\frac{dv}{dt}\frac{1}{1+\nu}\right).$$

Telle est l'équation différentielle, d'où nous déduirons la valeur de u.

Dans les formnles précédentes entrent les trois dérivées de la fonction perturbatrice $\frac{d\Omega}{dr}$, $\frac{d\Omega}{dv}$ et $\frac{d\Omega}{dZ}$.

Nous allons en chercher les expressions.

On a, en considérant séparément chaque astre perturbateur,

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{XX' + YY' + ZZ'}{r'^3}\right),$$

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)Z'.$$

Posons

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} = h,$$

et soit β' l'angle que fait le rayon vecteur de la planète perturbatrice avec le plan des XY, on aura

$$Z' = r' \sin\beta',$$

d'où

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{m'}{1+m} h r' \sin\beta'.$$

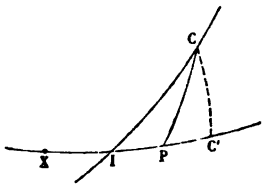
Pour obtenir $\frac{d\Omega}{dr}$ et $\frac{d\Omega}{dv}$, nous prendrons la fonction perturbatrice sous la forme

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos CP\right),$$

Digitized by Google

C étant le lieu de la planète perturbatrice, et P celui de l'astre troublé (*fig.* 6). Appelons XC′, ν'.

Fig. 6.



On a

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos CP, \quad \cos CP = \cos\beta'\cos(\nu' - \nu),$$

et, par suite,

$$\frac{d\Omega}{d\nu} = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) rr' \cos\beta' \sin(\nu' - \nu),$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) r' \cos\beta' \cos(\nu' - \nu) - \frac{m'}{1+m}\frac{r}{\Delta^3}.$$

Nous obtenons donc les trois dérivées dont nous avons besoin

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{dr} = \dfrac{m'}{1+m}\left[hr'\cos\beta'\cos(\nu' - \nu) - \dfrac{r}{\Delta^3}\right], \\ \dfrac{d\Omega}{d\nu} = \dfrac{m'}{1+m} hrr'\cos\beta'\sin(\nu' - \nu), \\ \dfrac{d\Omega}{dZ} = \dfrac{m'}{1+m} hr'\sin\beta'. \end{cases}$$

Nous allons maintenant reprendre les trois expressions de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, $\frac{d.\delta\zeta}{dt}$ et $\frac{d^2u}{dt^2}$, et leur donner la forme définitive appropriée au calcul.

Prenons $\frac{d^2\nu}{dt^2}$. Les différents termes du second membre contiennent tous, soit ν, soit une dérivée de la fonction perturbatrice qui renferme m' en facteur. Nous pourrons, en ne négligeant que des quantités insensibles, comme nous le verrons, y remplacer r et ρ par r_0, et φ par f, et écrire

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{k^2}{r_0^3}\nu + \frac{k^2}{r_0}\frac{d\Omega}{dr} - \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin f}{r_0}\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{2k^2}{r_0^3}\lambda_0 \int \frac{d\Omega}{d\nu}\,dt;$$

et ici r_0 et f sont le rayon vecteur et l'anomalie vraie, qui se déduisent des éléments constants.

Digitized by Google

Posons, pour abréger,

$$k^2 \frac{d\Omega}{dv} = S, \quad k^2 \frac{d\Omega}{dr} = R, \quad k^2 \frac{d\Omega}{dZ} = Z,$$

et remplaçons λ_0^2 par $\frac{k^2}{p_0}$, il viendra, en multipliant les deux membres par le carré de l'intervalle de temps adopté ω^2 (pour l'application des formules de quadrature),

$$\omega^2 \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\omega^2 R}{r_0} + \frac{2\omega k^2}{r_0^4} \frac{1}{k\sqrt{p_0}} \omega \int S dt - \frac{e_0 \sin f}{p_0 r_0} \omega^2 S - \frac{\omega^2 k^2}{r_0^3} v.$$

Nous aurons de même

$$\frac{d.\delta\zeta}{dt} = \lambda_0 \int \frac{d\Omega}{dv} dt - 2v.$$

Multiplions par le moyen mouvement μ_0, et posons

$$\mu_0 \delta\zeta = \delta M,$$

nous aurons

$$\frac{d.\delta M}{dt} = \mu_0 \lambda_0 \int \frac{d\Omega}{dv} dt - 2\mu_0 v,$$

et, multipliant par ω,

$$\omega \frac{d.\delta M}{dt} = \mu_0 \left(\frac{1}{k\sqrt{p_0}} \omega \int S dt - 2\omega v \right).$$

Quant à u, on a simplement

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = Z \cos i_0 - \frac{k^2}{r_0^3} u,$$

d'où

$$\omega^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = \omega^2 Z \cos i_0 - \omega^2 \frac{k^2}{r_0^3} u.$$

IV.

Tableau des formules employées dans le calcul des perturbations spéciales.

$$\begin{cases} R = m'k^2 \left[hr' \cos\beta' \cos(v' - v) - \frac{r_0}{\Delta^3} \right], \\ S = m'k^2 hr_0 r' \cos\beta' \sin(v' - v), \\ Z = m'k^2 hr' \sin\beta'. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\begin{cases} \omega^2 \dfrac{d^2 v}{dt} = \omega^2 \dfrac{R}{r_0} + 2\omega \dfrac{k^2}{r_0^3} \dfrac{1}{k\sqrt{p_0}} \omega \displaystyle\int S dt - \dfrac{e_0 \sin f}{p_0 r_0} \omega^2 S - \dfrac{\omega^2 k^2}{r_0^3} v, \\ \omega \dfrac{d.\delta M}{dt} = \mu_0 \left(\dfrac{1}{k\sqrt{p_0}} \omega \displaystyle\int S dt - 2\omega v \right), \\ \omega^2 \dfrac{d^2 u}{dt^2} = \omega^2 Z \cos i_0 - \dfrac{\omega^2 k^2}{r_0^3} u. \end{cases}$$

Les formules de quadrature employées sont les suivantes, dues à Encke :

$$\int_{\frac{1}{2}\omega}^{i\omega} f(x)\,dx = \omega\Big[\tfrac{1}{2} f_1\left(i + \tfrac{1}{2}\omega\right) - \tfrac{1}{24} f'\left(i + \tfrac{1}{2}\omega\right) + \tfrac{11}{1440} f'''\left(i + \tfrac{1}{2}\omega\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2} f_1\left(i - \tfrac{1}{2}\omega\right) - \tfrac{1}{24} f'\left(i - \tfrac{1}{2}\omega\right) + \tfrac{11}{1440} f'''\left(i - \tfrac{1}{2}\omega\right)\Big],$$

où l'on a

$$f_1\left(\tfrac{\omega}{2}\right) = -\tfrac{1}{24} f'\left(\tfrac{1}{2}\omega\right) + \tfrac{17}{5760} f'''\left(\tfrac{1}{2}\omega\right).$$

$$\int_{\frac{1}{2}\omega}^{i\omega} dx \int_{\frac{1}{2}\omega}^{x} f(x)\,dx = \omega^2 \left[f_2(i\omega) + \tfrac{1}{12} f(i\omega) - \tfrac{1}{240} f''(i\omega) \right]$$

ou

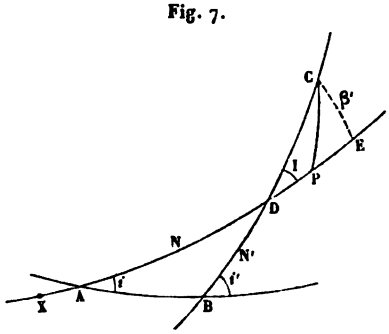
$$f_2(0) = \tfrac{1}{24} f(\omega) - \tfrac{17}{5760} [2f''(\omega) + f''(0)].$$

Ces formules se trouvent démontrées par M. Airy dans le *Nautical Almanac* de 1846, et dans l'Ouvrage de Watson. On peut consulter sur le même sujet une thèse de M. Gruey.

M. Puiseux les a également expliquées dans son Cours de la Sorbonne.

Figurons le plan fixe (*fig.* 7) et les deux orbites de la planète et de l'astre

Fig. 7.



perturbateur, Jupiter, par exemple ; on a

$$XP = v, \quad XE = v'.$$

Digitized by Google

Or, dans les formules entre $v' - v$, posons

$$AP = w, \quad AE = w';$$

on a alors

$$w' - w = v' - v.$$

Il faut calculer w' et β'.

On aura, u' étant l'argument de la latitude de Jupiter,

$$\begin{cases} DC = u'_0 = u' - N', & AD = N, \\ DE = w' - N, & BD = N'. \\ CE = \beta'; \end{cases}$$

On a

$$\tang(w' - N) = \tang u'_0 \cos I,$$
$$\tang \beta' = \tang I \sin(w' - N),$$

équations qui détermineront β' et w', quand N', N et I seront connus.

Les données de la question sont i, i', inclinaisons des deux orbites sur le plan fixe; Ω, Ω' les longitudes de leurs nœuds ascendants. On pourra donc, dans le triangle ADB, connaissant $AB = \Omega' - \Omega$, les deux angles $A = i$, $B = 180^\circ - i'$, calculer N, N' et I par les formules

$$\begin{cases} \sin\frac{1}{2} I \sin\frac{1}{2}(N + N') = \sin\frac{1}{2}(\Omega' - \Omega)\sin\frac{1}{2}(i' + i), \\ \sin\frac{1}{2} I \cos\frac{1}{2}(N + N') = \cos\frac{1}{2}(\Omega' - \Omega)\sin\frac{1}{2}(i' - i), \\ \cos\frac{1}{2} I \sin\frac{1}{2}(N - N') = \sin\frac{1}{2}(\Omega' - \Omega)\cos\frac{1}{2}(i' + i), \\ \cos\frac{1}{2} I \cos\frac{1}{2}(N - N') = \cos\frac{1}{2}(\Omega' - \Omega)\cos\frac{1}{2}(i' - i). \end{cases}$$

Quant à w, on a

$$w = f + \pi_0 - \Omega;$$

Δ la distance des deux planètes est fournie par l'équation

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(w' - w) \cos\beta'.$$

Voici donc la marche à suivre :

Adopter un plan fixe, qui sera, par exemple, le plan de l'écliptique à une cer-

Digitized by Google

taine époque; prendre par rapport à ce plan dans les éphémérides ☊, ☊′, i et i'; calculer alors N, N′ et I.

Les Tables de la planète perturbatrice donnent les longitudes dans l'orbite. On en déduira les quantités u', et par suite w' et β'. Les mêmes éphémérides donnent les valeurs de r'.

Quant aux valeurs de r_0 et de f, on les calculera par les formules connues au moyen des éléments pris pour base.

V.

Application.

Connaissant les éléments de la planète Eugénie, pour 1857, juillet 1, calculer l'éphéméride pour décembre 28, et, par suite, les perturbations de quarante en quarante jours dans cet intervalle.

Voici les éléments adoptés (planètes perturbatrices Jupiter et Saturne) :

$$\begin{aligned} M &= 64^\circ.51'.21'',2 && \text{1858, janvier 0.} \\ \pi &= 229.42.\ 3,6 && \text{Équinoxe moyen de 1857,} \\ ☊ &= 148.\ 5.\ 2,8 && \text{janvier 0.} \\ i &= 6.34.55,8 \\ \mu &= 13'10'',95527 \\ \psi &= 4.43.26,5 \end{aligned}$$

Les formules de quadrature contenant toutes $\frac{1}{2}\omega$ pour limite inférieure des intégrales, on a pris pour temps zéro la date de juin 11, vingt jours avant juillet 1.

On a ainsi obtenu

	Juin 11.	Juillet 21.	Août 30.	Oct. 9.	Nov. 18.	Déc. 28.
Anomalie moy. M....	20°.15′.17″,3	29°. 2′.35″,5	37°.49′.53″,7	46°.37′.11″,9	55°.24′.30″,1	64°.11′.48″,3
» exc. ι.....	22. 1.27,5	31.30.33,7	40.55.21,0	50.14.52,0	59.28.22,7	68.35.23,3
» vraie f....	23.52. 1,68	34. 4. 9,60	44. 7. 2,80	53.58.43,92	63.37.47,36	73. 3.19,14
$\pi - ☊ + f = w$....	105.29. 2,5	115.41.10,4	125.44. 3,6	135.35.44,7	145.14.48,2	154.40.19,9
» r_0 ...	0,400 0788	0,402 9530	0,406 6668	0,411 0738	0,416 0110	0,421 3130

Éléments des planètes Jupiter et Saturne.

	Jupiter.	Saturne.
i.....	1°.18′.40″,27	2°.29′.27″,45
☊	98.55.33,8	112.28.27,1

Digitized by Google

d'où l'on déduit

	Jupiter.	Saturne.
N.....	189°.50'.48",70	197°.40'.26",70
N'.....	238.56.52,43	233.12. 2,48
I.....	5.48.34,64	4.46.52,70

	Juin 11.	Juillet 21.	Août 30.	Oct. 9.	Nov. 18.	Déc. 28.
			Jupiter.			
w'....	239°.32'.28",7	243°.11'.36",1	246°.50'.26",5	250°.28'.55",0	254°. 6'.56",2	257°.44'.27",1
β'....	+4.26.12,51	+4.39.59,48	+4.52.37,10	+5. 4. 2,42	+5.14.12,91	+5.23. 6,58
r'....	0,695 569	0,695 950	0,696 408	0,696 937	0,697 938	0,698 204
			Saturne.			
w'....	318°.51'.50",2	320°.21'.29",5	321°.51'. 4",4	323°.20'.33",4	324°.49'.56",4	326°.19'.12",9
β'....	+4. 5.33,90	+4. 1.37,05	+3.57.30,58	+3.53.14,70	+3.48.49,62	+3.44.15,60
r'....	0,955 794	0,955 978	0,956 177	0,956 390	0,956 618	0,956 859

Constantes employées.

$$m'\,♃ = \frac{1}{1047,89}, \qquad m'\,♄ = \frac{1}{3501,6},$$

$$(\log \omega^2 k^2 m' = \bar{4},654\,967)\,♃, \quad (\log \omega^2 k^2 m' = \bar{4},131\,016)\,♄,$$

$$\log \frac{e_0}{p_0} = 2,484\,084, \qquad \log a_0 = 0,434\,570,$$

$$\log \mu_0 = 2,898\,152, \qquad \log e_0 = \bar{2},915\,698.$$

$$\log \sqrt{p_0} = 0,215\,807,$$

$$\log \frac{1}{k\sqrt{p_0}} = 1,548\,612,$$

$$\log \frac{\omega k}{\sqrt{p_0}} = \bar{1},922\,864.$$

Type du calcul.

On n'a inscrit les développements que pour les deux dates extrêmes.

Digitized by Google

Tableau I.

	1857. Jupiter.			
	Juin 11.		Décembre 28.	
f	23°.52'. 1",7		73°. 3'.19",1	
$\varpi' - \varpi$	134. 3.26,2		103. 4. 7,2	
β'	+ 4.26.12,5		+ 5.23. 6,6	
l. $\sin\beta'$	+ $\bar{2}$,888 514		+ $\bar{2}$,972 436	
l. r'	+ 0,695 569		0,698 204	
l. r	0,400 079		0,421 313	
l. $\cos\beta'$	+ $\bar{1}$,998 697		+ $\bar{1}$,998 079	
l. $\cos(\varpi' - \varpi)$	− $\bar{1}$,842 220		− $\bar{1}$,354 337	
l. r^2	0,800 158		0,842 626	
	0,690 129	0,590 980*	0,660 787	0,553 782*
l. r'^2	1,391 138		1,396 408	
l. $(r^2 + r'^2)$	1,490 287		1,503 413	
	0,445 501	0,252 692*	0,804 541	0,730 450*
l. $2rr'\cos\beta'\cos(\varpi' - \varpi)$	1,237 595		0,772 963	
l. Δ^2	1,683 096		1,577 504	
l. Δ	0,841 548		0,788 752	
l. Δ^3	2,524 644		2,366 256	
l. $\frac{1}{\Delta^3}$	$\bar{3}$,475 356		$\bar{3}$,633 744	
	0,240 843	0,437 937*	$\bar{1}$,939 094	0,271 644*
l. $\frac{1}{r'^3}$	$\bar{3}$,913 293		$\bar{3}$,905 388	
l. r'^3	2,086 707		2,094 612	
l. h	− $\bar{3}$,716 199		− $\bar{3}$,572 838	
l. $r'\cos\beta'\cos(\varpi' - \varpi)$	− 0,536 486		− 0,050 620	
l. $\tang(\varpi' - \varpi)$	− 0,014 294		− 0,634 267	
l. $hr'\cos\beta'\cos(\varpi' - \varpi)$	+ $\bar{2}$,252 685		+ $\bar{3}$,623 458	
	0,141 039	0,377 250*	0,230 823	0,431 599*
l. $\frac{r}{\Delta^3}$	+ $\bar{3}$,875 435		+ $\bar{2}$,055 057	
l. $\left[hr'\cos\beta'\cos(\varpi' - \varpi) - \frac{r}{\Delta^3}\right]$	+ $\bar{2}$,016 474		+ $\bar{3}$,854 281	
l. $\omega^2 R$	+ $\bar{6}$,668 949		− $\bar{6}$,506 756	
l. $hr'\cos\beta'\sin(\varpi' - \varpi)$	− $\bar{2}$,266 979		− $\bar{2}$,257 725	
l. $hrr'\cos\beta'\sin(\varpi' - \varpi)$	− $\bar{2}$,667 058		− $\bar{2}$,679 038	
l. $\omega^2 S$	− $\bar{5}$,319 533		− $\bar{5}$,331 513	
$\omega^2 S$	− 208,70		− 214,54	
l. $\frac{\omega^2 R}{r_0}$	+ $\bar{6}$,268 870		− $\bar{6}$,083 443	

* Nombres servant au calcul des logarithmes de Gauss.

Digitized by Google

Tableau I. (Suite.)

	1857. Jupiter. Juin 11.		Décembre 28.	
l. $r'\sin\beta'$	$+\bar{1},584\ 083$		$+\bar{1},670\ 640$	
l. $\omega^2 Z\cos i_0$	$-\bar{7},949\ 885$		$-\bar{7},893\ 081$	
$\omega^2 Z\cos i_0$	$-8,91$		$-7,82$	
l. $\frac{\omega^2 S}{r_0}$	$-\bar{6},919\ 454$		$-\bar{6},910\ 200$	
l. $\sin f$	$+\bar{1},607\ 044$		$+\bar{1},980\ 724$	
l. $\omega\int S dt$	$+2,026\ 656$		$-3,008\ 345$	
l. $\frac{2\omega k}{\sqrt{p_0}}\omega\int S dt$	$+1,949\ 520$		$-2,931\ 209$	
l. r_0^3	$1,200\ 237$		$1,263\ 939$	
l. $\frac{2\omega k}{\sqrt{p_0}}\frac{\omega\int S dt}{r_3^0}$	$+0,749\ 283$		$-\bar{1},667\ 270$	
l. $\frac{e_0\sin f}{p_0}\frac{\omega^2 S}{r_0}$	$-\bar{7},010\ 582$		$-\bar{7},375\ 008$	
l. $\frac{\omega^2 k^2}{r_3^0}$	$\bar{2},475\ 046$		$\bar{2},411\ 344$	

	1857. Saturne. Juin 11.		Décembre 28.	
f	$23^\circ.52'.\ 1'',7$		$73^\circ.\ 3'.19'',1$	
$\omega'-\omega$	$213.22.47,7$		$171.38.53,0$	
β'	$+4.\ 5.33,9$		$+3.44.15,6$	
l. $\sin\beta'$	$+\bar{2},853\ 523$		$+\bar{2},814\ 170$	
l. r'	$0,955\ 794$		$0,956\ 859$	
l. r	$0,400\ 079$		$0,421\ 313$	
l. $\cos\beta'$	$+\bar{1},998\ 891$		$+\bar{1},999\ 075$	
l. $\cos(\omega'-\omega)$	$-\bar{1},921\ 707$		$-\bar{1},995\ 370$	
l. r^2	$0,800\ 158$		$0,842\ 626$	
	$1,143\ 795$	$1,111\ 430$*	$1,106\ 482$	$1,071\ 092$*
l. r'^2	$1,911\ 588$		$1,913\ 718$	
l. $(r^2+r'^2)$	$1,943\ 953$		$1,949\ 108$	
	$0,521\ 812$	$0,366\ 452$*	$0,460\ 244$	$0,275\ 461$*
l. $2rr'\cos\beta'\cos(\omega'-\omega)$	$+1,577\ 501$		$1,673\ 647$	
l. Δ^2	$+2,099\ 313$		$2,133\ 891$	
l. Δ	$1,049\ 657$		$1,066\ 946$	
l. Δ^3	$3,148\ 971$		$3,200\ 838$	

* Nombres servant au calcul des logarithmes de Gauss.

Digitized by Google

Tableau I. (Suite.)

	1857. Saturne. Juin 11.		Décembre 28.	
l. $\frac{1}{\Delta^3}$	$\bar{4}$,851 029		$\bar{4}$,799 162	
	$\bar{1}$,960 207	0,281 589*	0,056 618	0,330 261*
l. $\frac{1}{r'^3}$	$\bar{3}$,132 618		$\bar{3}$,129 423	
l. r'^3	2,867 382		2,870 577	
l. h	$-\bar{4}$,811 236		$-\bar{4}$,855 780	
l. $r'\cos\beta'\cos(w'-w)$	$-$0,876 392		$-$0,951 304	
l. tang$(w'-w)$	$+\bar{1}$,818 803		$-\bar{1}$,166 756	
l. $hr'\cos\beta'\cos(w'-w)$	$+\bar{3}$,687 628		$+$3,807 084	
	0,238 610	0,436 520*	0,456 395	0,586 609*
l. $\frac{r}{\Delta^3}$	$+\bar{3}$,251 108		$\bar{3}$,220 475	
l. $\left[hr'\cos\beta'\cos(w'-w)-\frac{r}{\Delta^3}\right]$	$+\bar{3}$,489 718		$+\bar{3}$,676 870	
l. ω^2R	$+\bar{7}$,620 734		$+\bar{7}$,807 886	
l. $hr'\cos\beta'\sin(w'-w)$	$+\bar{3}$,506 431		$-\bar{4}$,973 840	
l. $hrr'\cos\beta'\sin(w'-w)$	$+\bar{3}$,906 510		$-\bar{3}$,395 153	
l. ω^2S	$+\bar{6}$,037 526		$-\bar{7}$,526 169	
ω^2S	$+$10,90		$-$3,36	
l. $\frac{\omega^2 R}{r_0}$	$+\bar{7}$,220 655		$+\bar{7}$,386 573	
l. $r'\sin\beta'$	$+\bar{1}$,809 317		$+\bar{1}$,771 029	
l. $\omega^2 Z\cos i_0$	$-\bar{8}$,748 697		$-\bar{8}$,754 953	
$\omega^2 Z\cos i_0$	$-$0,56		$-$0,57	
l. $\frac{\omega^2 S}{r_0}$	$+\bar{7}$,637 447		$-\bar{7}$,104 856	
l. sin$f$	$+\bar{1}$,607 044		$+\bar{1}$,980 724	
l. $\omega\int S\,dt$	$-$0,716 838		$+$0,210 586	
l. $\frac{2\omega k}{\sqrt{p_0}}\omega\int S\,dt$	$-$0,639 702		$+$1,133 450	
l. r_0^2	1,200 237		1,263 939	
l. $\frac{2\omega k}{\sqrt{p_0}}\frac{\omega\int S\,dt}{r_0^2}$	$-\bar{1}$,439 465		$+\bar{1}$,869 511	
l. $\frac{e_0\sin f}{p_0}\frac{\omega^2 S}{r_0}$	$+\bar{9}$,728 575		$-\bar{9}$,569 664	
l. $\frac{\omega^2 k^2}{r_0^2}$	$\bar{2}$,475 046		$\bar{2}$,411 344	

* Nombres servant au calcul des logarithmes de Gauss.

Digitized by Google

Tableau II.

Calcul de $\omega \int S\,dt$.

1857. Jupiter.

	$\omega^2 S$.					$\omega \int S\,dt$.
	+ 209,28					
Juin 11.....		−208,70		+ 5,45		+ 106,33
	+ 0,58		−14,01		+ 0,59	
Juillet 21....		−222,71		+ 6,04		− 109,36
	− 221,13		− 7,97		+ 0,45	
Août 30.....		−230,68		+ 6,49	−14	− 336,08
	− 451,81		− 1,48		+ 0,31	
Oct. 9.....		−232,16		+ 6,80	−13	− 568,05
	− 683,97		+ 5,32		+ 0,18	
Nov. 18. ...		−226,84		+ 6,98		− 798,13
	− 910,81		+12,30		+ 0,05	
Déc. 28. ...		−214,54		+ 7,03		−1019,40
	−1125,35		+19,33			

Saturne.

	$\omega^2 S$.					$\omega \int S\,dt$.
	− 10,81		− 1,52			
Juin 11.....		+10,90		− 0,67		− 5,31
	+ 0,09		− 2,19		+ 0,17	
Juillet 21.....		+ 8,71		− 0,50		+ 4,65
	+ 8,80		− 2,69		+ 0,18	
Août 30.....		+ 6,02		− 0,32		+ 12,29
	+ 14,82		− 3,01		+ 0,15	
Oct. 9.....		+ 3,01		− 0,17		+ 16,58
	+ 17,83		− 3,18		+ 0,16	
Nov. 18.....		− 0,17		− 0,01		+ 18,01
	+ 17,66		− 3,19		+ 0,15	
Déc. 28.....		− 3,36		+ 0,14		+ 16,24
	+ 14,30		− 3,05			

Digitized by Google

Tableau II. (Suite.)

Calcul de ν.

	f_2.		$\omega^2 \frac{d^2\nu}{dt^2}$.		ν.
Juin 11.....	+ 0,44		+ 26,46		+ 2,64
		+ 0,67		− 15,99	
Juillet 21.....	+ 1,11		+ 10,47		+ 1,98
		+ 11,14		− 16,54	
Août 30.....	+ 12,25		− 6,34		+ 11,72
		+ 4,80		− 16,13	
Oct. 9.....	+ 17,05		− 21,72		+ 15,24
		− 16,92		− 16,23	
Nov. 18.....	+ 0,13		− 38,29		− 3,06
		− 55,21		− 14,69	
Déc. 28.....	− 55,08		− 51,53		− 59,38

Valeur approchée de ν donnée par la formule

$$\nu = +0{,}0058(t-20)^2 - 0{,}000042(t-20)^3.$$

Calcul de u.

	$\omega^2 \frac{d^2u}{dt^2}$.					u.
Juin 11.....	− 0,398		− 9,45			− 0,79
		+ 0,004		− 0,11		
Juillet 21.....	− 0,394		− 9,56		+ 0,16	− 0,79
		− 9,56		+ 0,05		
Août 30.....	− 9,95		− 9,51		+ 0,94	− 10,35
		− 19,07		+ 0,99		
Oct. 9.....	− 29,02		− 8,52		+ 1,13	− 29,38
		− 27,59		+ 1,12		
Nov. 18.....	− 56,61		− 7,40		+ 0,32	− 57,23
		− 34,99		+ 1,44		
Déc. 28.....	− 91,60		− 5,96			− 91,85

Digitized by Google

Tableau II. (Suite.)

Calcul de δM.

	$\omega \frac{d.\delta M}{dt}$.				δM.
	− 0,242		− 0,410		
Juin 11.....		+ 0,266		− 0,175	− 0″,07
	+ 0,024		− 0,585		
Juillet 21.....		− 0,319		− 0,076	− 0,08
	− 0,295		− 0,661		
Août 30.....		− 0,980		+ 0,002	− 0,73
	− 1,275		− 0,659		
Oct. 9.....		− 1,639		+ 0,135	− 2,05
	− 2,914		− 0,524		
Nov. 18.		− 2,163		+ 0,257	− 3,69
	− 5,077		− 0,267		
Déc. 28.....		− 2,430		+ 0,377	− 6,29
	− 7,507		+ 0,110		

Cherchons la position de la planète pour la date 1857, décembre 28. On a (unités du septième ordre)

$$\nu = -59,38, \quad u = -91,85, \quad \delta M = -6'',29.$$

On trouve alors

$$\varphi = 73^\circ 3' 12'',78,$$
$$\varphi + \pi_0 = \nu = 302^\circ 45' 16'',38.$$

Connaissant ν et u, on aura les valeurs de l et de b par les formules

$$\begin{cases} \cos b \cos(l - \theta_0) = \cos(\nu - \theta_0), \\ \cos b \sin(l - \theta_0) = \sin(\nu - \theta_0) \cos i_0 - \operatorname{tang} i_0 \frac{u}{r}, \\ \sin b \qquad = \sin(\nu - \theta_0) \sin i_0 + \frac{u}{r}; \end{cases}$$

$$l = 302^\circ 54' 2'',69; \qquad \begin{cases} \sin b = + \bar{2},6905252, \\ \cos b = + \bar{1},9994772; \end{cases}$$

$$r = \rho(1 + \nu) = (\log) 0,4213094;$$

Digitized by Google

d'où (coordonnées héliocentriques écliptiques)

$$\begin{aligned} x &= r\cos b\cos l, \\ y &= r\cos b\sin l, \\ z &= r\sin b; \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\log x + 0,1557345, \\ &\log y - 0,3448656, \\ &\log z + \bar{1},1118346. \end{aligned} \right.$$

Passant de là aux coordonnées héliocentriques *équatoriales* (ε = inclinaison de l'écliptique),

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon, \\ z_1 &= y\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon; \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\log x_1 + 0,1557345, \\ &\log y_1 - 0,3182843, \\ &\log z_1 - \bar{1},8819723. \end{aligned} \right.$$

Par la méthode des coordonnées rectangulaires, on a trouvé

$$\text{Déc. 28.} \quad \delta x_1 = -841, \qquad \delta y_1 = -243, \qquad \delta z_1 = -122;$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \log x_1 &= +0,1557337, \\ \log y_1 &= -0,3182852, \\ \log z_1 &= -\bar{1},8819724. \end{aligned} \right.$$

L'accord est parfait.

Les équations différentielles qui servent à établir les variations des coordonnées dans la deuxième méthode sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta x}{dt^2} &= m'\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) + \frac{M}{r_0^3}(fqx - \delta x), \\ \frac{d^2\delta y}{dt^2} &= m'\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right) + \frac{M}{r_0^3}(fqy - \delta y), \\ \frac{d^2\delta z}{dt^2} &= m'\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right) + \frac{M}{r_0^3}(fqz - \delta z), \end{aligned}$$

dans lesquelles on a

$$q = \frac{(x_0 + \frac{1}{2}\delta x)\delta x}{r_0^2} + \frac{(y_0 + \frac{1}{2}\delta y)\delta y}{r_0^2} + \frac{(z_0 + \frac{1}{2}\delta z)\delta z}{r_0^2},$$

Digitized by Google

et

$$f = 3\left(1 - \frac{5}{2}q + \frac{5.7}{2.3}q^2 - \frac{5.7.9}{2.3.4}q^3 + \ldots\right).$$

L'examen des calculs à effectuer dans les deux méthodes est tout à l'avantage de la première.

Il n'y a de différentielle un peu longue à calculer que celle de ν. Celles de u et de δM sont extrêmement simples et s'obtiennent avec rapidité; tandis que, dans le second procédé, il y a trois intégrales toutes pareilles à effectuer. D'autre part, les variations δx, δy, δz augmentent plus rapidement de beaucoup que les nouvelles variations adoptées, ainsi qu'on peut en juger par les résultats comparatifs suivants :

$$\begin{cases} \nu = -59 \\ u = -92 \\ \delta M = -\ 6{,}3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x = -841, \\ \delta y = -243, \\ \delta z = -122. \end{cases}$$

Il nous a été ainsi permis d'agrandir l'intervalle de temps et de le fixer à quarante jours, tandis qu'ordinairement il n'est que de trente.

Dans l'expression de $\frac{d^2\nu}{dt^2}$, par exemple, nous avons mis, à la place de ρ, r et φ, partout r_0 et f, ce qui est absolument permis pour un temps assez long; mais, une fois le calcul en marche, rien n'empêche de recourir aux véritables valeurs. En effet, on connaîtra alors un certain nombre de valeurs de ν et de δM, et l'extrapolation fournira des valeurs de ν et de δM suffisamment précises pour le calcul ultérieur de ρ, r et φ.

On a refait le calcul pour la dernière date avec les valeurs rigoureuses de ρ, r et φ, sans trouver de modification au calcul précédent. Ajoutons que dans notre travail nous nous sommes servis avec beaucoup d'avantages des Tables de logarithmes de Gauss, d'addition et de soustraction, et de l'édition à sept décimales de Wittstein.

Il y a, dans l'emploi de ces Tables, que l'on ne saurait trop, suivant nous, recommander, une abréviation notable du travail et un moyen d'éviter les erreurs.

Il nous reste à dire quelques mots des termes qui ont été négligés dans les expressions des dérivées des variables, à montrer que ces termes sont extrêmement petits, et à faire voir en outre que, dans le cas où ils atteindraient une valeur sensible, on pourrait facilement les obtenir au moyen des tableaux de calculs déjà écrits.

Digitized by Google

Dans $\omega^2 \frac{d^2\nu}{dt^2}$ nous avons omis le terme

$$\omega^2 k^2 \frac{\lambda_0^2}{r^3}\left(\int \frac{d\Omega}{dv}\, dt\right)^2;$$

on peut l'écrire

$$\omega^2 \frac{\lambda_0^2}{k^2 r^3}\left(\int k^2 \frac{d\Omega}{dv}\, dt\right)^2 = \frac{1}{p_0 r^3}\left(\omega \int S\, dt\right)^2;$$

or $\omega \int S\, dt$ se trouve au tableau (II), et $p_0 r^3$ au tableau (I).

En prenant pour unité la septième décimale, dans notre exemple, le décembre 28, ce terme n'atteint pas 0,01.

2° Dans $\omega^2 \frac{d^2 u}{dt^2}$, nous avons négligé d'abord la partie

$$\omega^2 \frac{u}{1+\nu}\left(\frac{k^2}{\rho}\frac{d\Omega}{dr} - \frac{\lambda_0^2 e_0 \sin\varphi}{r}\frac{d\Omega}{dv}\right),$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\omega^2 R}{r_0} - \frac{e_0 \sin f}{p_0 r_0}\omega^2 S\right)\frac{u}{1+\nu}.$$

La parenthèse est connue d'après le tableau (I) et u d'après le tableau (II).

Ce terme est d'une extrême petitesse.

Ensuite le terme $\omega^2 \lambda \frac{d\Omega}{dv}\frac{du}{dt}$, que l'on peut écrire

$$\omega^2 \frac{k}{\sqrt{p_0}}\frac{d\Omega}{dv}\frac{du}{dt} = \frac{\omega^2}{k\sqrt{p_0}} S \frac{du}{dt} = \omega^2 S \omega \frac{du}{dt}\frac{1}{\omega k \sqrt{p_0}};$$

$\omega^2 S$ est dans le tableau (I); $\omega \frac{du}{dt}$ se calcule au moyen des nombres du tableau (II). Ce terme est encore absolument négligeable.

Quant au dernier $\lambda \frac{d\Omega}{dv} u \frac{dv}{dt}\frac{1}{1+\nu}$, il est du troisième ordre.

Passons à l'expression $\omega \frac{d.\delta M}{dt}$.

Les parties négligées $3\mu_0 \omega \nu^2$, $-2\frac{\mu_0}{k\sqrt{p_0}}\omega \int S\, dt \times \nu$ sont complétement insensibles; car les quantités $3\mu_0 \omega \nu$ et $\frac{2\mu_0}{k\sqrt{p_0}}$, $\omega \int S\, dt$ (dans notre exemple), dont

Digitized by Google

la plus grande n'atteint pas 5 secondes, sont multipliées par ν, qui est plus petit que 0,000006.

Par des considérations toutes pareilles, on arriverait à apprécier et à évaluer au besoin les variations de θ et de i.

Quant aux expressions sp et sq, ainsi que Γ, on voit, par les formules des pages 25 et 26, que leurs valeurs sont insensibles.

Vu et approuvé.

Paris, le 11 janvier 1877.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

MILNE EDWARDS.

Permis d'imprimer.

Le Recteur de l'Académie de Paris,

A. MOURIER.

Digitized by Google

Digitized by Google